View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE

専修人間科学論集　心理学篇　Vol.1, No.1, pp.91～98, 2011

クロンバックの α 係数とは何だったのか：信頼性係数のレビューと実データ分析

岡田謙介[1]

Beyond Cronbach's alpha : A review and empirical comparison of reliability coefficients

Kensuke Okada

Abstract : Cronbach´s alpha has been used as a golden standard reliability criterion. Although psychometricians have long been pointed out that the alpha is not the most appropriate way to examine reliability, the gap between psychometrics and psychology has impeded the application of other reliability measures. However, recently the interest has been growing ; many papers have published recommendations for alternative reliability measures. In this paper, we first review both classical and modern lower bounds of reliability. Then, these measures are demonstrated by the analysis of several artificial and real datasets. The results coincided with the findings of Revelle & Zinbarg (2009) in that ω_t is the most recommended lower bound.
Key words : reliability, Cronbach´s alpha, lower bounds, real data analysis

1. はじめに

何らかの方法で測定を行い，その測定値をデータとした研究を遂行するにあたっては，測定がどれだけ信頼できるものかということに注意を払う必要がある。信頼性（reliability）とは測定値がどれだけ一貫しているかの度合いを表す概念である。具体的には，同一の個人に対して同一の条件のもとで同一のテストを繰り返し実施したとき，一貫して同一の得点が得られる程度として定義される（中島・安藤・子安・坂野・繁桝・立花・箱田，1999）。

信頼性概念の重要性は決して心理学分野に限られるものではない。しかし，心理学では人間の心という複雑な対象を扱うため，測定に誤差が混入しやすいと考えられる。したがって，心理尺度などによって実施される測定が信頼性の高いものあることは，重要なことと広く認識されている。また，やはり新しい測定法（新しい心理尺度など）を提案する際には，通常その方法論が高い信頼性を持つことを示すよう求められる。たとえば標準的な知能検査は，再検査信頼性の相関係数が0.85～0.90と，問題の複雑さを顧みるに高い信頼性を持つことが知られている（Eysenck，2000）。

現在，心理学領域における信頼性といえば，多くの研究でクロンバックの α 係数が算出され，この値がある程度大きいことをもって信頼性が担保されたとみなされるのが一般的である。しかしながら，クロンバックの α 係数がどのような指標であるのか，また信頼性の指標としてクロンバックの α 係数以外にはどのようなものが考えられるのか，といったことについての理解は十分進んでいないように思われる。実は心理統計学においては，クロンバックの α が最良の信頼性係数の下界ではないことが古くから指摘されている（e.g.，Guttman，1945）。それにも関わらず，応用的には信頼性係数といえば α，という状況がいまだに続いているのが実状である。Sijtsma（2009a）はこのような状況が生まれてしまった原因として，統計学の色合いを強めた心理統計学と，心理学自体との乖離を指摘している。そして近年，α の代替案をもっと積極的に普及させていこうという心理統計学の側からの動きが活発化している（e.g., Sijtsma，2009a，b； Revelle & Zinbarg，2009； Green & Yang，2009a）

こうした現状を鑑み，本稿ではまず信頼性という概念についての確認を行った後，Sijtsma（2009a）や Revelle & Zinbarg（2009）に基づき，これまでに提案されているさまざまな信頼性係数の推定値をレビューする。実は多くが50年以上昔の研究によって知られているものである。その後，いくつかの人工データおよび実データについて，実際に多数の信頼性係数の推定値を算出し，どの指標がよい推定値を与えるかについて検討を行ったので報告する。

受稿日2010年10月14日　受理日2010年12月７日
1　専修大学人間科学部心理学科（Department of Psychology, Senshu University）

2. 信頼性係数

2.1. 信頼性と妥当性

一般に心理尺度などの測定は，高い信頼性と妥当性を持つことが重要であるとされる。先に述べたように信頼性が測定値が一貫している度合いを表すのに対し，妥当性は測定値が本当に測りたい対象を測定できている度合いを表す概念である。

Sijtsma（2009c）が指摘するように，妥当性についての議論と比較すると，信頼性についての議論はより数理的なものであることが多い。その理由は，信頼性というのは測定値の一貫性という観点から測定の一側面のみを扱うのに対し，妥当性は測られているものが一体何であるのかという，より意味や内容に踏み込んだ評価が求められるからと考えられる。逆に言うと，信頼性は妥当性よりもより数理的な定式化がしやすい概念である。

2.2. Guttman による信頼性係数の下界

伝統的には，Guttman（1945）や Cronbach（1951）をはじめとする多くの金字塔的研究において，信頼性係数は要素の式で記述されてきた。Zinbarg，Revelle，Yovel & Li（2005）や Revelle & Zinbarg（2009）は，これを統一的な行列表記に基づいて記述し直している。これによりΣ記号を省いた簡潔な記述が可能になるため，本稿でも彼らの記述法を採用する。本節と次節の記述は Revelle & Zinbarg（2009）および Guttman（1945）に依るものである。

いま，同一の個人に対し同一の条件のもとで同じテストの測定が2回行われたとする。このときのテストの結果を，それぞれ $\mathbf{X}$ と $\mathbf{X}'$ で表すことにする。$\mathbf{X}$ および $\mathbf{X}'$ はそれぞれ，被験者数(N)×項目数(n)の形の通常の多変量データ行列である。

このとき，両テストの分散共分散行列は

$$\Sigma_{XX'}=\begin{pmatrix}\mathbf{V}_X & \mathbf{C}_{XX'}\\ \mathbf{C}_{XX'} & \mathbf{V}_{X'}\end{pmatrix} \tag{1}$$

で表される。$V_X=\mathbf{1}\,\mathbf{V}_X\mathbf{1}'$，$C_{XX'}=\mathbf{1}\,\mathbf{C}_{XX'}\mathbf{1}'$ とすると，2テスト間の相関は

$$\rho=\frac{C_{XX'}}{\sqrt{V_X V_{X'}}} \tag{2}$$

と表すことができる。この ρ が，求めたい信頼性係数の真値ということになる。

現実的には，$\mathbf{X}$ と $\mathbf{X}'$ という同一条件の測定を同一の個人に対して行うことは困難である。その困難性の要因としては，問題項目の記憶，練習効果，特性の変化など心理学ならではの要因がありうる（中島ら，1999）。

そのため，1度だけの測定から信頼性について何が言えるのかが心理統計学的な関心の対象となる。Guttman（1945）は，一度の測定から得ることのできる，6つの信頼性係数の下界（lower bound）を導出した。任意の信頼性係数の下界を λ で表すと，下界の導出における前提条件のもとで，定義より確率1で

$$\lambda\leq\rho\leq 1 \tag{3}$$

が成立する。Guttman により提出された6種類の下界を，彼の表記にしたがって λ_1～λ_6 で表すことにする。

彼の導出における仮定は，2度の測定間の共分散 $C_{XX'}$ は真の（関心下の）変動 V_t のみを含み，テストの分散 V_X は関心化の変動 V_t と誤差変動 V_e に分解できるというものである。すなわち，

$$V_X=\mathbf{1}\,\mathbf{V}_X\mathbf{1}'=\mathbf{1}\,\mathbf{V}_t\mathbf{1}'+\mathbf{1}\,\mathbf{V}_e\mathbf{1}'=V_t+V_e \tag{4}$$

である（X′についても同様）。また，2度の測定において真の変動と誤差変動はそれぞれ等しいとする。すなわち $\mathbf{V}_t=\mathbf{V}_t'$，$\mathbf{V}_e=\mathbf{V}_e'$ である（したがって $\mathbf{V}_X=\mathbf{V}_X'$ である）。

これらを用いると，2テスト間の変動を表す(1)式は

$$\Sigma_{XX'}=\begin{pmatrix}\mathbf{V}_t+\mathbf{V}_e & \mathbf{V}_t\\ \mathbf{V}_t & \mathbf{V}_t+\mathbf{V}_e\end{pmatrix} \tag{5}$$

と書けることになり，(2)式の信頼性係数は

$$\rho=\frac{V_t}{V_X}=1-\frac{V_e}{V_X} \tag{6}$$

となる。この V_t と V_e を，1度の測定からどのように推定するかが問題である。

Guttman（1945）の第一の下界は，単純に各項目の分散はすべて誤差であり，項目間の共分散こそが真の変動であると考えるものである。項目の分散はすべて誤差であると考えるため，項目誤差分散の総和は $\mathrm{tr}(\mathbf{V}_X)$ によって与えられる[1]。(6)式の V_e を $\mathrm{tr}(\mathbf{V}_X)$ で置き換えた形の

$$\lambda_1=1-\frac{\mathrm{tr}(\mathbf{V}_X)}{V_X} \tag{7}$$

が第一の下界となる。Guttman（1945）はこの λ_1 を単純な下界（a simple lower bound）と呼んでいる。実際には $\lambda_1>0$ において次に述べる λ_2 のほうがよい（大きな）下界を与えるため，現実に λ_1 を用いる理由はほとんどないと考えられる。しかしこの λ_1 は計算が非常に容易であり，以下で与える様々な下界の基礎として位置づけられる。

Guttman の第二の下界の導出には，（１度の測定における）項目間の共分散の平方和

$$C_2 = \mathbf{1}(\mathbf{V}_X - \mathrm{diag}(\mathbf{V}_X))^2\mathbf{1}' \tag{8}$$

が必要となる[2]。これを用いると，第二の下界 λ_2 は

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{\sqrt{\frac{n}{n-1}C_2}}{V_X} \tag{9}$$

によって与えることができる。Guttman（1945）はこの λ_2 をよりよい下界（a better lower bound）と呼んでいる。

一方，Guttman の第三の下界はこの共分散の平方和 C_2 の計算を必要とせず，

$$\lambda_3 = \frac{n}{n-1}\lambda_1 \tag{10}$$

によって与えられる。そして，この λ_3 こそが後に Cronbach（1951）が α とよび，現在クロンバックの α 係数として最も広く普及している信頼性係数である。

Guttman（1945）が指摘するように，$\lambda_1 > 0$ において λ_1，λ_2，λ_3 の間には

$$\lambda_1 < \lambda_3 \leq \lambda_2 \tag{11}$$

の関係がある。つまり，λ_2 は λ_3（クロンバックの α）以上の下界を与える。また Ten Berge & Zegers（1978）が示したように，λ_2 と λ_3 はどちらも λ_1 を補正する無限順序集合のうちの最初の２つ（μ_1，μ_2）となっている。実は，彼らが指摘するようにこの考えにしたがった更なる改良も（μ_3，μ_4，…）数理的には可能である。

なお，余談であるがクロンバックの α 係数を「信頼性係数の下限」と説明する文献が少なからず見られる。この歴史的経緯は不明であるが，数学用語としての下限（infimum）は，下界のうち最大のもの（最大下界，greatest lower bound）のことを指す。α はこれまでにも見てきたように多数ある下界のうちのひとつにすぎず，下限すなわち $\inf \rho$ を与えるわけではない。したがって，「信頼性係数の下界」とよぶことが適切であると考えられる。

Guttman の第四の下界はこれまでの３つの下界とは異なり，折半法（split-half method）による信頼性係数の推定を扱ったものである。いま $\mathbf{X}$ を $\mathbf{X}_a$ と $\mathbf{X}_b$ の２つに折半した場合を考え，その分散がぞれぞれ V_{Xa} と V_{Xb} であるとする。このとき第４の下界は

$$\lambda_4 = 2\left(1 - \frac{V_{Xa} + V_{Xb}}{V_X}\right) \tag{12}$$

によって与えられる。この λ_4 は $\mathbf{X}$ の分割の仕方に依らず下界を与えることが知られている。ここで，$\mathbf{X}_a$ と $\mathbf{X}_b$ の間の相関係数を r_{ab} とすると，

$$V_X = V_{Xa} + V_{Xb} + 2V_{Xa}V_{Xb}r_{ab} \tag{13}$$

の関係が成り立つ。いま仮に $V_{Xa} = V_{Xb}$ であるとするならば，⑿式と⒀式より

$$\lambda_4 = \frac{2r_{ab}}{1 + r_{ab}} \tag{14}$$

が成立する。これはスピアマン－ブラウンの公式としてよく知られる，折半法による信頼性係数の修正式の形になっている（Spearman，1910；Brown，1910）。

Guttman による第五の下界は，λ_2 と類似の形となる。いま，

$$C_{2\max} = \max(\mathbf{1}(\mathbf{V} - \mathrm{diag}(\mathbf{V}))^2) \tag{15}$$

とする。つまり，$C_{2\max}$ は項目間共分散の二乗和の，項目についての最大値である。これを使うと，第五の下界 λ_5 は

$$\lambda_5 = \lambda_1 + \frac{2\sqrt{C_{2\max}}}{V_X} \tag{16}$$

となる。この λ_5 は，

$$2\sqrt{C_{2\max}} > \sqrt{\frac{n}{n-1}C_2} \tag{17}$$

が成立するとき，λ_2 よりも大きな下界を与える。しかし，Revelle &Zinbarg（2009）は λ_5 についても⑽式の λ_3 と同様の考えによる補正を施した

$$\lambda_5 + = \lambda_1 + \frac{n}{n-1}\frac{2\sqrt{C_{2\max}}}{V_X} \tag{18}$$

の方がよりよい下界を与えることを指摘している。

Guttman の最後の下界は，各項目の分散のうち，その変数を従属変数としそれ以外のすべての変数を説明変数とした重回帰分析によって説明される分散の割合，つまり重相関係数の二乗（squared multiple correlation，SMC）を利用したものである。項目 j についてのこの重相関係数の二乗を r^2_{SMCj} で表すとき，第六の下界 λ_6 は

$$\lambda_6 = 1 - \frac{\Sigma_j(1 - r^2_{SMCj})}{V_x} = 1 - \frac{\Sigma_j e^2_j}{V_x} \tag{19}$$

によって与えられる。ただし，e^2_j は上述の重回帰分析によって説明されない残差分散である。項目間の単純相関が小さく重相関が大きい場合，λ_6 は λ_2 よりも大きな下界を与える。逆に項目間の単純相関が大きく重相関が小さい場合には，λ_6 は λ_2 よりも小さくなる。

以上で見たように，よく知られたクロンバックの α

係数とは，Guttman（1945）の提案した信頼性係数の6つの下界のうちの1つにすぎないものである。かつ，実用上常にその値以上の値を与える下界（λ_3）も知られている。

2.3. より新しい信頼性係数の下界

Guttman以降にも，1度の測定から信頼性係数を推定するための多くの研究が行われた。

Revelle（1979）はRevelleのβと呼ばれる指標を提出した。この指標はλ_4と同様に分割を扱い，平均共分散を最小化するような「最悪の分割」を考えその場合の平均共分散の値を$\bar{\sigma}'$としたとき

$$\beta=\frac{n^2\bar{\sigma}'}{V_x} \tag{20}$$

によって与えられる。この指標は最悪の分割を考えるものであり，$\beta\leq\alpha$の関係がある。

よりよい信頼性係数の下界を考える研究の中で，特筆すべきはMcDonald（1999）による研究である。彼は，λ_6の導出における(19)式の残差分散e_j^2を，因子分析による独自性の推定値で置き換えることを提案した。彼は項目間の分散V_Xの背後に，全項目に共通して影響を与える一般因子g，特定の項目のみに影響を与える群因子**f**，各変数に独自の独自因子**s**，および誤差**e**からなる構造を考えた。このとき観測変数は

$$\mathbf{x}=\mathbf{c}g+\mathbf{Af}+\mathbf{Ds}+\mathbf{e} \tag{21}$$

と分解される。項目が標準化されているとすると，項目jの共通性は

$$h_j^2=c_j^2+\sum_i f_{ij}^2 \tag{22}$$

であり，同じく項目jの独自性は

$$u_j^2=(1-h_j^2) \tag{23}$$

となる。これを用いると，McDonald（1999）により提案された下界ω_tは

$$\omega_t=\frac{1-\Sigma_j(1-h_j^2)}{V_x}=1-\frac{\Sigma_j u_j^2}{V_x} \tag{24}$$

によって与えられる。$h_j^2\geq r_{SMCj}^2$であるので，$\omega_t\geq\lambda_6$が成立する。

ここで，McDonaldのωとよばれる信頼性係数の下界にはもう一つ，McDonald（1978）によるものもあることに注意が必要である。これは，ω_tと違い一般因子gのみを考え，群因子**f**については考えない場合に対応する。この場合，項目jの共通性は$h_j^{2\prime}=c_j^2$，同じく独自性は$u_j^{2\prime}=(1-h_j^{2\prime})$となり，これらを用いてMcDonald（1978）の下界ω_hは

$$\omega_h=1-\frac{\Sigma_j(1-h_j^{2\prime})}{V_x}=1-\frac{\Sigma_j u_j^{2\prime}}{V_x} \tag{25}$$

によって与えられる。

また，Ten Berge & Hofstee（1999）は因子分析ではなく主成分分析に基づく下界を提出している。これは，観測相関行列の最大固有値をkとするとき，

$$\alpha_{pc}=1-\frac{n}{(n-1)k} \tag{26}$$

によって与えられる。この値は観測データに主成分分析による最適な重みをつけた下界と解釈することが可能である。

最後に，信頼性係数のglb（greatest lower bound）と呼ばれる指標が知られている。この指標には注意が必要であり，文字通り信頼性係数の最大下界が数理的に導出され，それがglbと呼ばれているわけではない。glbとは，λ_4と同様に分割の問題に絞って考えた場合，下界が最大となるような分割（等分割とは限らない）を与える値である（Revelle & Zinbarg, 2009）。つまり分割の最適性を考えているに過ぎず，信頼性係数の一般的な最大下界を与えているわけではない。

この最適分割を実際にどのように求めるかという方法論には様々なものが提案されており，大別してクラスター分析を利用するもの，因子分析を用いるものがある。さらにアルゴリズムに関して細かなバリエーションが存在する。

3. 実際の分析例

3.1. Revelle & Zinbarg（2009）の再現分析

Revelle & Zinbarg（2009）は実際のデータ分析における信頼性係数の下界の挙動について理解するため，いくつかのデータで実際に2節で述べた多数の信頼性係数の下界を算出した。本節ではまず，彼らの結果のうちSijtsma（2009a, Table 5）による3種類の人工データについての分析を再現する。この人工データは6変数間の相関行列であり，全体が3因子構造の場合（Revelle & Zinbargに倣い，これをS-2aと呼ぶ。以下同様），2因子構造の場合（S-2b），1因子構造の場合（S-2c）の3つの場合が検討されている。いずれの場合も，クロンバックのαの値が$\alpha=0.533$となるように設計されている。実際の数値についてはAppendixのRプログラムを参照してほしい。

信頼性係数の下界の導出には，フリーの統計ソフトウ

Table **1** Comparisons of 13 estimates of reliability for Sijtsma (2009 a)'s data.

	S−2a	S−2b	S−2c
N items	6	6	6
β（min）	.000	.000	.533＊
ω_h	.000＊	.000	.532
λ_1	.444	.444	.444
λ_3（α, μ_0）	.533	.533	.533
α_{pc}	.533	.533	.533
λ_2（μ_1）	.643	.585	.533
μ_2	.663	.592	.533
μ_3	.666	.592	.533
λ_5	.593	.549	.511
λ_6（smc）	.800	.571	.488
λ_4（max）	**.889**	.593＊	.533
glb	**.889**	**.669＊**	.533
ω_t	**.889**	**.669**	**.536＊**

Table **2** Comparisons of 13 estimates of reliability for the data of Bartholomew (1987), Wansbeek & Meijer (2000), and Jouvent et al. (1988).

	B87	WM00	J88
N items	6	7	20
β（min）	.672	.689	.035
ω_h	.574	.718	.607
λ_1	.669	.736	.703
λ_3（α, μ_0）	.803	.858	.740
α_{pc}	.810	.859	.848
λ_2（μ_1）	.814	.862	.791
μ_2	.818	.863	.793
μ_3	.819	.864	.793
λ_5	.792	.830	.750
λ_6（smc）	.830	.865	.865
λ_4（max）	.852	.777	.753
glb	.866	.894	.880
ω_t	**.893**	**.908**	**.886**

ェア・統合環境である R（R Development Core Team，2010）のバージョン2.11.1上で，R 用パッケージのひとつである psych（Revelle，2010）を利用した。同パッケージは Revelle & Zinbarg（2009）においても利用されたものである。以下で示す結果を得るために用いた実際の R スクリプトは，Appendix に記載されている。

ここでいくつかの注意点について述べる。まず，glb の値は因子分析を用いた分割に基づいたものである。さらに，ここで報告する λ_4（max）は単純な分割に基づく⒁式によって与えられる値ではなく，可能な様々な分割を考えた場合の glb の最大値である。具体的には，ICLUST によるクラスター分析，k−means 法によるクラスター分析，および因子分析の３つの場合を考え，各々の glb のうち最大のものを λ_4（max）として報告している。以上２つの導出法は，Revelle & Zinbarg（2009）において報告されている方法であり，彼らの結果を再現するためにこのような算出法をとった。

結果として得られた各種信頼性係数の下界の値を Table 1 に掲載する。太字はそのデータについて最大の下界を与えたものである。すべてのデータで ω_t が最大の下界を与えている。もっとも S−２a のデータでは λ_4（max），glb も，S−２b のデータでは glb も同じく最大の下界を与えている。応用的にもっとも頻繁に用いられるクロンバックの α は，ほかの信頼性係数の下界と比較してかなり小さな値をとっていることがわかる。つまり，ほかの多くの指標よりも α は信頼性係数を過小評価している。⑶式の関係を思い出すと，α 以外の指標を用いることで，より大きな信頼性係数の下界を算出できることが示されたと言える。

なお，また，アスタリスク（＊）は Revelle & Zinbarg（2009, Table 1）によって報告された値とは異なる値が算出された要素を表す。少数ながらこのような要素が存在した理由は不明である。

3.2. 新たな実データの分析

前節に引き続き，本節では新たなデータに対して同様の分析を行った。分析したデータは以下の３種類である。

第一のデータは Bartholomew（1987）の，知能テストデータである。このデータは一般・絵画完成・ブロック・迷路・読解・語彙の６項目からなり，標本数は N＝112であった。このデータは R の stats パッケージに含まれているものである。第二のデータは，Wansbeek & Meijer（2000）による，オランダにおけるテレビ視聴率の相関係数である。ここで項目に対応するのは７局のテレビ局になっており，その相関係数を分析した。このデータは R の GPArotation パッケージ（Bernaards & Jennrich，2005）に含まれているものである。第三のデータは，Jouvent，Vindreau，Montreuil，Bungener，＆Widlocher（1988）による抑うつ気分の質問紙データであり，20項目に N＝269名が回答したものである。こ

のデータはRのpsyパッケージ（Falissard，2009）に含まれているものである。

これらのデータを前節と同じ方法で分析した結果がTable 2にまとめられている。太字はそのデータについて最大の下界を与えた指標である。3種類の実データいずれにおいても，ω_tが最大の下界を与えていることが見てとれる。また，クロンバックのαよりも大きな下界を与えている指標はやはり多数あり，必ずしもよく使われているα係数がよい下界を与えているわけではないことがわかる。

4. まとめと議論

本稿では，Guttman（1945）による信頼性係数の下界，およびより新しい信頼性係数の下界についてレビューを行った。その後，実際にこれらの信頼性係数の下界をさまざまなデータについて導出した。

本研究で行った分析において，一貫してもっともよい下界を与えたのはMcDonald（1999）のω_tである。この結果はRevelle & Zinbarg（2009）において報告された結果と一致するものである。Sijtsma（2009a）はglbの使用を推奨しているが，本研究およびRevelle & Zinbarg（2009）の結果からは，ω_tを用いると高い信頼性の推定値を得られるようである。ただし，これが信頼性の真値をバイアスなく推定できているかは別途シミュレーション研究などで検証する必要があると考えられる。本研究で算出した各種信頼性係数は，Appendixに示すようにフリーの統計ソフトウェアRとRevelle（2010）のパッケージを用いて簡単に計算できる。

本稿で取り扱わなかったものの近年注目を集めている信頼性係数の推定法として，共分散構造分析に基づいたモデルベースのアプローチが挙げられる（e. g., Green & Yang，2009b；Yang & Green，2010）。この方法論については今後比較検討が必要である。

クロンバックによるαの発表から50年を記念し，2001年に行われたインタビューをまとめた論文（Cronbach，2004）において，クロンバック自身ももはや決してαが最良の方法ではないと述べている。また，心理統計学者は長年に渡ってそのことを指摘してきたが，応用的にはα係数は長らく信頼性係数の代名詞として使われてきた。α係数を報告した研究には大いなる過去の蓄積があり，比較可能性というのも研究上は重要な観点である。そのため筆者はいますぐα係数を報告するのをやめよ，と主張するつもりはない。しかし，我々はよりよいと考えられる指標を手に入れている。したがって，Sijtsma（2009a）やRevelle & Zinbarg（2009）も指摘するように，αだけでなくω_tなどほかの指標を併せて報告することが望ましいであろう。

註

1）tr(**X**）は行列**X**の対角要素の和を表す。

2）diag(**X**）は正方行列**X**の対角要素ベクトルを表す。

引用文献

Bartholomew, D.J. (1987). *Latent Variable Analysis and Factor Analysis*. Griffin.

Bernaards, C. A. & Jennrich, R. I. (2005). Gradient projection algorithm and software for arbitrary rotation criteria in factor analysis. *Educational and Psychological Measurement*, **65**, 676–696.

Brown, W. (1910). Some experimental results in the correlation of mental abilities. *British Journal of Psychology*, **3**, 296–322.

Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, **16**, 297–334.

Cronbach, L. J. (2004). My current thoughts on coefficient alpha and successor procedures. *Educational and Psychological Measurement*, **64**, 391–418.

Eysenck, M. (2000). *Psychology : A student´s handbook*. Psychology Press.（山内光哉（監修）（2008）アイゼンク教授の心理学ハンドブックナカニシヤ出版）

Falissard, B. (2009). *Package 'psy' : various procedures used in psychometry*. R package version 1.0.

Green, S. B. & Yang, Y. (2009 a). Commentary on coefficient alpha : a cautionary tale. *Psychometrika*, **74**, 155–168.

Green, S. B. & Yang, Y. (2009 a). Reliability of summed item scores using structural equation modeling : an alternative to coefficient alpha. *Psychometrika*, **74**, 121–136.

Guttman, L. (1945). A basis for analyzing test–reset reliability. *Psychometrika*, **10**, 255–282.

Jouvent, R., Vindreau, C., Montreuil, M., Bungener, C. & Widlocher, D.(1988). La clinique polydimensionnelle de l´humeur dépressive : Nouvelle version de l´échelle EHD, *Psychiatrie et Psychobiologie*, **3**, 245 – 253.

McDonald, R. P. (1978). Generalizability in factorable domains : "Domain validity and generalizability." *Educational and Psychological Measurement*, **38**, 75–79.

McDonald, R. P. (1999). *Test theory : a unified treatment*. Hillsdale : Erlbaum.

中島義明・安藤清志・子安増生・坂野推二・繁桝算男・立花政夫・箱田裕司（1999）．心理学辞典有斐閣．

R Development Core Team (2010) *R : a language and environment for statistical computing*. Vienna, Austria.

Revelle, W. (1979). Hierarchical cluster-analysis and the internal structure of tests. *Multivariate Behavioral Research*, **14**, 57–74.

Revelle, W. & Zinbarg, R.E. (2009). Coefficients alpha, beta, omega, and the glb : comments on Sijtsma. *Psychometrika*, **74**, 145–154.

Revelle, W. (2010). *psych : Procedures for Personality and Psychological Research*. R package version 1.0.

Sijtsma, K. (2009 a). On the use, the misuse, and the very limited usefulness of Cronbach's alpha. *Psychometrika*, **74**, 107–120.

Sijtsma, K. (2009 b). Reliability beyond theory and into practice. *Psychometrika*, **74**, 169–173.

Sijtsma, K. (2009 c). Correcting fallacies in validity, reliability, and classification. *International Journal of Testing*, **9**, 167–194.

Spearman, C. C. (1910). Correlation calculated from faulty data. *British Journal of Psychology*, **3**, 271–295.

Ten Berge, J. M. F. & Zegers, F.E. (1978) A series of lower bounds to the reliability of a test. *Psychometrika*, **43**, 575–579.

Ten Berge, J. M. F. & Hofstee, W. K. B. (1999). Coefficients alpha and reliabilities of unrotated and rotated components. *Psychometrika*, **64**, 83–90.

Wansbeek, T. & Meijer, E. (2000). *Measurement Error and Latent Variables in Econometrics*. Amsterdam : North-Holland.

Yang, Y. & Green, S. B. (2010). A note on structural equation modeling estimates of reliability. *Structural Equation Modeling*, **17**, 66–81.

Zinbarg, R.E., Revelle, W., Yovel, I., & Li, W. (2005). Cronbach's α, Revelle's β, and McDonald's ω_{H} : their relations with each other and two alternative conceptualizations of reliability. *Psychometika*, **70**, 123–133.

Appendix

3.1節の結果を導くために利用されたＲスクリプトは以下のとおりである。

```
library(psych)

# Revelle & Zinbarg(2009)で行われている
# Sijtsma(2009 a, Table 5 ; S–2 a)のデータの再分析の再現

R<–rbind(c(0.250, 0.200, 0,     0,     0,     0    ),
         c(0.200, 0.250, 0,     0,     0,     0    ),
         c(0,     0,     0.250, 0.200, 0,     0    ),
         c(0,     0,     0.200, 0.250, 0,     0    ),
         c(0,     0,     0,     0,     0.250, 0.200),
         c(0,     0,     0,     0,     0.200, 0.250))

res 1<–alpha(R)
res 2<–guttman(R)
res 3<–omega(R)

res.S 2 a<–c(ncol(R), res 2$beta, res 3$omega_h, res 2$
  lambda.1, res 2$lambda.3, res 2$alpha.pc, res 2$lambda.2,
  res 2$tenberge$mu 2, res 2$tenberge$mu 3, res 2$
  lambda.5, res 2$lambda.6, res 2$lambda.4, res 2$glb, res 3
  $omega.tot)

#同じく，Sijtsma(2009 a, Table 5 ; S–2 b)のデータの再分析
 の再現

R<–rbind(c(0.250, 0.100, 0.100, 0,     0,     0    ),
         c(0.100, 0.250, 0.100, 0,     0,     0    ),
         c(0.100, 0.100, 0.250, 0,     0,     0    ),
         c(0,     0,     0,     0.250, 0.100, 0.100),
         c(0,     0,     0,     0.100, 0.250, 0.100),
         c(0,     0,     0,     0.100, 0.100, 0.250))

res 1<–alpha(R)
res 2<–guttman(R)
res 3<–omega(R)

res.S 2 b<–c(ncol(R), res 2$beta, res 3$omega_h,res 2$
  lambda.1, res 2$lambda.3, res 2$alpha.pc, res 2$lambda.2,
  res 2$tenberge$mu 2, res 2$tenberge$mu 3, res 2$
  lambda.5, res 2$lambda.6, res 2$lambda.4, res 2$glb, res 3
  $omega.tot)

#同じく，Sijtsma(2009 a, Table 5 ; S–2 c)のデータの再分析
 の再現

R<–matrix(0.04, ncol=6, nrow=6)
diag(R)<–rep(0.25, 6)

res 1<–alpha(R)
res 2<–guttman(R)
res 3<–omega(R)

res.S 2 c<–c(ncol(R), res 2$beta, res 3$omega_h, res 2$
  lambda.1, res 2$lambda.3, res 2$alpha.pc, res 2$lambda.2,
  res 2$tenberge$mu 2, res 2$tenberge$mu 3, res 2$
  lambda.5, res 2$lambda.6, res 2$lambda.4, res 2$glb, res 3
  $omega.tot)

#結果のまとめ

resall<–cbind(res.S 2 a, res.S 2 b, res.S 2 c)
```

```
round(resall, 3)
```

3.2 節の結果を導くために利用された R スクリプトは以下のとおりである。

```
# Bartholomew(1987)のデータ

data(ability.cov)
R<−cov 2 cor(ability.cov$cov)

res 1<−alpha(R)
res 2<−guttman(R)
res 3<−omega(R)

res.R 1<−c(ncol(R), res 2$beta, res 3$omega_h, res 2$
   lambda.1, res 2$lambda.3, res 2$alpha.pc, res 2$lambda.2,
   res 2$tenberge$mu 2, res 2$tenberge$mu 3, res 2$
   lambda.5, res 2$lambda.6, res 2$lambda.4, res 2$glb, res 3
   $omega.tot)

# Wansbeek & Meijer(2000)のデータ

library(GPArotation)
data("WansbeekMeijer")
R<−NetherlandsTV

res 1<−alpha(R)
res 2<−guttman(R)
res 3<−omega(R)

res.R 2<−c(ncol(R), res 2$beta, res 3$omega_h, res 2$
   lambda.1, res 2$lambda.3, res 2$alpha.pc, res 2$lambda.2,
    res 2$tenberge$mu 2, res 2$tenberge$mu 3, res 2$
   lambda.5, res 2$lambda.6, res 2$lambda.4, res 2$glb, res 3
   $omega.tot)

# Jouvent et al.(1988)のデータ

library(psy)
data(ehd)

R<−cor(ehd)

res 1<−alpha(R)
res 2<−guttman(R)
res 3<−omega(R)

res.R 3<−c(ncol(R), res 2$beta, res 3$omega_h, res 2$
   lambda.1, res 2$lambda.3, res 2$alpha.pc, res 2$lambda.2,
    res 2$tenberge$mu 2, res 2$tenberge$mu 3, res 2$
   lambda.5, res 2$lambda.6, res 2$lambda.4, res 2$glb, res 3
   $omega.tot)

###結果のまとめ

resall 2<−cbind(res.R 1, res.R 2, res.R 3)
round(resall 2, 3)
```